Manual de Teoría de Errores y Procesamiento de Datos Experimentales

ERRORES EN LAS MEDICIONES:

1. INTODUCCION

1.1 IDEAS BASICAS SOBRE ERRORES EN LAS MEDICIONES.

El valor verdadero de una magnitud o parámetro es aquel que se mediría si no se introdujera ningún error en el método de medición ni existieran limitaciones en las cifras que pueden apreciarse en una escala. En la práctica esto es imposible pues existen diversas fuentes de errores y una apreciación limite posible en las escalas de los instrumentos.

Llamamos error absoluto $\delta' x$ de una medición a la diferencia entre el valor medido, x , y el valor verdadero, x_o:

$\delta' x = x - x_o$. Como en la práctica no se conoce el valor x_o , es más objetivo hablar de la cota de error absoluto δx de la medición, entendiendo por tal el módulo de la diferencia máxima posible entre el valor medido, x, y el valor verdadero x_o :

$$\delta x = |x - x_o|_{max} \qquad (1)$$

De esta definición resulta: $\pm\delta x = x - x_o$:

por tanto,

$$x_o = x \pm \delta x \qquad (2)$$

Así en la práctica reportamos el valor medido, x, con la afectación máxima posible que fija el error absoluto, $\pm\delta x$, o sea, reportamos como resultado de la medición: $x \pm \delta x$ y no un valor verdadero x_o que no es posible precisar.

Los métodos experimentales de la Física procuran de continuo disminuir más la cota de error absoluto δx de las mediciones, lo cual conlleva a aumentar el número de cifras exactas y significativas de los valores medidos a x; esto es una tarea sumamente difícil.

En el lenguaje habitual, los físicos se refieren a la cota de error absoluto simplemente como error absoluto, sin mencionar la palabra cota. Debe entenderse, sin embargo, que se refieren al máximo error posible en la medición reportada y no a su diferencia con el valor verdadero(que no se conoce).

En la teoría de errores en las mediciones resulta más significativo el concepto de error relativo. Este se define como el cociente entre el error absoluto y el valor verdadero. En la práctica, el físico emplea el concepto de cota de error relativo, e.r., que se define como el cociente entre la cota de error absoluto x y el valor medido, x:

e.r.= $\delta x/x$ (3)

Aunque se trata de una cota de error relativo, el físico puede referirse a ella como error relativo a secas. Se expresa como un decimal o como un porcentaje. Así, si en una medición de longitud se tiene x =25,0m y δx = 0,1 cm, entonces e.r. = 0,004 o e.r.= 0,4 %.

El error relativo caracteriza la calidad de una medición, en otras palabras, mide la precisión de una medición. Es mas precisa una medición cuyo error relativo es del 0,1% que otra con un error relativo del 10%, aún cuando esta ultima puede ser más exacta que la primera. Esto se aclara en el ejemplo siguiente: ¿Qué medida es mas exacta, una con error absoluto de 1 mm u otra con error absoluto de 1 cm?

Diremos que la más exacta es la que tiene x = 1 cm. Ahora bien, si el error de 1 mm se cometió midiendo la longitud de un objeto de 1 cm(10 mm) de largo, que error relativo se cometió? La respuesta es e.r.= $\delta x/x$ =1/10= 10 % lo cual indica el empleo de un método poco preciso: se apreció bien el centímetro pero sus décimas son dudosas. En cambio, si el error absoluto de 1cm se cometió al medir una varilla de 10 m (1000 cm) de largo, resulta que el error relativo de la medición sería: e.r.= $\delta x/x$ = 1/1000 = 0,001 = 0,1 %, lo cual significa que se pudieron apreciar bien tres cifras exactas (decenas, unidades, décimas) y solo la siguiente (centésima) resulta dudosa; sin dudas, esta segunda medición fue más precisa en la determinación de la

Diremos que la más exacta es la que tiene x = 1 cm. Ahora bien, si el error de 1 mm se cometió midiendo la longitud de un objeto de 1 cm(10 mm) de largo, que error relativo se cometió? La respuesta es e.r.= $\delta x/x$ =1/10= 10 % lo cual indica el empleo de un método poco preciso: se apreció bien el centímetro pero sus décimas son dudosas. En cambio, si el error absoluto de 1cm se cometió al medir una varilla de 10 m (1000 cm) de largo, resulta que el error relativo de la medición sería: e.r.= $\delta x/x$ = 1/1000 = 0,001 = 0,1 %, lo cual significa que se pudieron apreciar bien tres cifras exactas (decenas, unidades, décimas) y solo la siguiente (centésima) resulta dudosa; sin dudas, esta segunda medición fue más precisa en la determinación de la
magnitud que se propuso. Así, el error relativo da una medida de la precisión de una medición y error absoluto da una medida de su exactitud.

Debemos aclarar que en un experimento pueden cometerse equivocaciones tales como montar un instrumento inadecuadamente, con un ángulo de inclinación indebido, con un voltaje que no corresponde, violando alguna condición señalada como necesaria por el manual del equipo, pueden confundirse los números de la escala, se puede multiplicar por un factor de escala incorrecto. Estas equivocaciones no se identifican como errores experimentales. La teoría de errores en las mediciones sólo se ocupa de los errores imputables a los propios instrumentos (supuestos en sus condiciones óptimas de trabajo), de las deficiencias intrínsecas al método de medición empleado y de factores casuales, incontrolables, que a veces causan lecturas algo mayores o menores que aquellas que más se repiten en condiciones similares de experimentación. En definitiva, no deben confundirse los errores de una medición con las equivocaciones groseras durante su realización. Los errores pueden ser tratados matemáticamente y si se cometen equivocaciones, lo único posible a hacer es repetir el experimento o los cálculos.

1.2.CLASIFICACION DE ERRORES:

Atendiendo a la forma en que se manifiestan los errores en el experimento, se pueden clasificar en los siguientes tipos:

a) Casuales: tienen su origen en factores incontrolables para el experimentador, y su presencia se manifiesta en el hecho de que en condiciones aparentemente iguales, si se repite la medición da un valor ligeramente distinto, afectando una o dos cifras de las que se ven en la escala. Pueden deberse a un cambio de la temperatura ambiente en el laboratorio, a una fluctuación del voltaje en una red eléctrica, a una vibración casi inadvertida de la mesa de trabajo, por pasos cercanos a la misma o por vehículos pesados que pasan próximos al laboratorio; o una variación de presión atmosférica, o de humedad relativa, o deberse a una corriente de aire que soplaba de forma irregular. En fin, de acuerdo a la naturaleza de la medición pueden estar influyendo los factores más insospechados.

Normalmente, al trabajar con equipos muy sensibles y de gran exactitud, los errores casuales se hacen notar, aun los más péquenos. En la medida que se trabaja con instrumentos menos exactos, los errores casuales dejan de percibirse y quedan enmascarados por la poca exactitud de la medición. Cuando los errores casuales son detectables, la medición de la magnitud x arroja distintos valores (aunque cercanos) cada vez que se repite; en tal caso, el valor que se reporta en la medición es la media aritmética de todos los valores obtenidos, que representamos por

$$\bar{x}=(x_1 + x_2 +.......+ x_n)/n \qquad (4)$$

$$\bar{x} = 1/n \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (5)$$

Las expresiones (4) y (5) son equivalentes, x_i representa cada medición individual, $x_1, x_2, \ldots x_n,$ y el símbolo $\sum_{i=1}^{n}$ indica sumar todos los sumandos x_i dando valores a i desde 1 hasta n.

Debe señalarse que si alguna de las mediciones realizadas se nota que difiere ostensiblemente de las restantes, se achaca a alguna equivocación cometida y se excluye al calcular el promedio (ni se suma ni se incluye en el valor n con que se saca el promedio).

Además, el promedio no puede reportarse con más exactitud que la de las mediciones individuales; o sea, si cada x_i representara un voltaje medido hasta la décima de Volt (25,4 V; 25,8 V; 25,3 V; 26,1 V.) el valor medio no puede reportarse más exacto que la décima de Volt. Si al dividir la sumatoria entre n diese un decimal periódico, habría que redondear hasta las décimas. Un valor medio no puede ser más exacto que las mediciones particulares a partir de las cuales se calcula.

b) Sistemáticos:

Son aquellos cuyo origen se puede conocer y su valor puede ser calculado con exactitud, para con él realizar una enmienda al valor de la medición realizada. Tienen la característica de que el valor del error no fluctúa, es siempre el mismo para cada lectura y siempre por exceso o siempre por defecto, por lo que la enmienda a realizar en cada medición es completamente evaluable.

Tal es por ejemplo, el caso de una cinta milimetrada, preparada para trabajar a 20 °C pero que en determinado experimento se usó a 35 °C; en este caso se puede buscar el coeficiente de dilatación del metal de la cinta y calcular que longitud Δ l se ha dilatado cada milímetro debido al exceso de temperatura (35 – 20 = 15 °C). Conocida esta dilatación, se puede hacer la corrección de cada lectura; en este caso basta notar que al leer una longitud de 970 mm, por ejemplo, en realidad la lectura debía ser algo mayor, pero por estar dilatada la escala, cubra con menos divisiones la longitud a medir. Entonces, bastaría multiplicar 970 por lo que se dilató cada milímetro para valorar la dilatación total de la escala en esa longitud y sumando ese valor a los 970 se obtendría la longitud corregida.

Otro error sistemático frecuente es no evaluar el error de entrada de cada instrumento(el valor no nulo que indica el instrumento cuando debía registrar cero) para hacer las correcciones posteriores a cada lectura.

Según la naturaleza de la medición, los errores sistemáticos pueden tener muy diversas causas, en cada caso es un deber del experimentador analizar lo más minuciosamente posible las condiciones del experimento para evaluar los distintos errores sistemáticos posibles.

c) Errores de exactitud de las escalas:
Sabemos que cada escala tiene una menor división por debajo de la cual ya no pueden apreciarse más cifras en las mediciones. Esto impone un limite a la exactitud con que puede hacerse la medición, por debajo de la cual esta presenta una incertidumbre que tiene como cota máxima la menor división de la escala(o la exactitud alcanzable con la escala auxiliar) constituye un error insalvable de la medición .

1.3)FUENTES DE ERRORES:

Hemos mencionado posibles fuentes de errores casuales y sistemáticos, así como los errores de exactitud cuya fuente está en el límite de apreciación del instrumento. Existen algunas fuentes de errores más que pueden incluirse en alguno de los tipos anteriores.

a) Error de calibración. Clase de un instrumento.

Un instrumento puede no ser tan exacto en sus lecturas como se supone a partir de la exactitud de su escala. A manera de ejemplo, al emplear un cronómetro que aprecia en su escala la décima de segundo puede ocurrir que cierto intervalo de tiempo nos arroje una lectura de (14,4 $\pm$ 0,1)s, pero que el mismo intervalo medido por un instrumento patrón arroje(14,750 $\pm$ 01)s lo que nos revela que el error del primer cronómetro es bastante mayor que el error reportado de 0,1 s; esto es señal de que dicho instrumento está descalibrado o mal calibrado en relación con el instrumento patrón. Con tal cronómetro se está cometiendo un error de calibración en cada medición.

Para conocer los errores de calibración que comete cada instrumento de laboratorio, deben someterse los mismos a chequeos periódicos que permitan compararlos contra instrumentos patrones reconocidos por el Instituto de Metrología. Como resultado de estos chequeos puede hacerse una tabla o gráfico que acompañe al equipo informando el error de calibración correspondiente a cada división de la escala del instrumento; conociendo la tabla de calibración puede operarse el error de calibración como sistemático y corregir cada lectura hecha con el instrumento.

Otras veces, como resultado del chequeo se expide una nota que certifica cuál es la cota máxima de error de calibración del instrumento; tal error no sirve para corregir cada lectura y solo sirve para fijar el límite de error que puede cometerse en cada una, ya sea por exceso o por defecto. En tal caso, el error de calibración tiene las mismas características del error de exactitud del instrumento.

Un parámetro de importancia en instrumentos fundamentalmente eléctricos es su clase ya que ella permite hallar su cota de error de calibración. Los instrumentos eléctricos de mediana y alta calidad tienen escritos en algún rincón de su escala un número que representa su clase 0,1; 0,2; 0,4; 0,8; 1; 2). Este número representa la cota de error de calibración del instrumento(recién salido de la fábrica) expresándolo como un porcentaje del valor máximo de la escala. Esto es, si el instrumento es de clase 0,4 y su escala va del 0 al 50, significa que su cota de error de calibración es:

(0,4/100).50 = 0,2 unidades.

Si este error es menor que la exactitud del instrumento, se justifica apreciar hasta fracciones de la menor división de la escala. Se desprende de lo anterior que mientras menor sea el número que representa la clase de un instrumento, menor es el error de calibración y mayor la calidad del equipo.

b) Error de apreciación visual.

Este es el que surge como resultado que ante una misma posición de la aguja o del nonio en una escala, un observador puede leer 7,8,donde otro aprecia 7,9 o ver otro que la linea del nonio que coincide con una de la escala fija es la 4ta y otro ver que es la 5ta.

Este error puede manifestarse incluso en un mismo observador que en una ocasión lee 7,8 y unos minutos más tarde repite la medición y le parece ahora que es 7,9.

Tal error recibe el tratamiento propio de los errores casuales y su origen reside en procesos psico-fisiológicos del observador (cansancio visual, preferencia inconsciente por uno de los dos números, etc.)

c) Error de paralaje:

Es el que se comete cuando se realiza la lectura de forma tal que la recta que va del ojo a la división de la escala leída, pasando por el indicador de medición (aguja, perfil de un cuerpo) no cae perpendicular a la escala.

Según la posición relativa del ojo, el indicador y la escala, el error puede ser por defecto o por exceso.

Este error puede ser tratado como casual, sobre todo cuando son varios observadores los que hacen la misma lectura; pero bajo un solo observador, el error pudiera convertirse en sistemático si tiende a colocarse bajo el mismo ángulo. En todo caso, debe buscarse siempre la máxima perpendicularidad de la visual con la escala para reducir el error de paralaje hasta hacerlo despreciable comparado con el de exactitud o calibración.

d) Errores en la aproximación al modelo:

Estos son los errores que derivan de aplicar métodos de medición y de cálculo que suponen que el objeto real de la medición satisface a la perfección el modelo ideal que presupone la teoría.

Se cometen errores de este tipo cuando al determinar el volumen de una bolita de hierro medimos el diámetro con un micrómetro, lo dividimos entre 2 para hallar el radio R y calculamos el volumen mediante la fórmula $V=4/3\ \pi\ R^3$ suponiendo que la bolita es una esfera perfecta cuando es muy posible que el radio es ligeramente diferente en distintas direcciones; cuando se aplica la ley de Ohm a un elemento eléctrico sin tener en cuenta que su resistencia varía con la temperatura; o al aplicar la ley de caída libre a una piedra sin tener en cuenta la fricción con el aire.

En los experimentos estamos continuamente poniendo a prueba modelos, y hay que valorar en cada caso como influyen en el experimento real los elementos de la realidad que no tiene en cuenta el modelo Solo después de evaluarlos errores debidos a estas idealizaciones es que podemos valorar si los resultados coinciden con lo que preveía la teoría y su modelo.

e) Errores de exactitud del método de medición:

Estos son errores vinculados al método concreto de medición que se esté empleando y que producen una incertidumbre mayor que la fijada por el error de exactitud del instrumento.

Las formas en que se originan son muy diversas, relacionadas con

las particularidades del método de medición que se emplee, y su análisis constituye a veces un reto a la ingeniosidad del experimentador y a su capacidad para estimar el orden aproximado de los errores que pueden producirse; requiere además de un buen conocimiento de la teoría que se somete al experimento y de la técnica de medición empleada.

Es muy importante la detección de estos errores, así como lograr una estimación de los mismos. Cuando esto se hace los errores de exactitud del método deben reemplazar a los errores de exactitud de los instrumentos en los cálculos del error total con que se mide la magnitud de interés.

Así, puede ocurrir que se emplee una cinta milimetrada para medir la longitud de un alambre conductor, cuyos extremos están enrollados en dos bornes; en este caso el error de exactitud de la longitud no está fijado por la escala de la cinta sino por la falta de precisión en los puntos del alambre que hacen un contacto eléctrico efectivo con los bornes O sea, aunque el error del instrumento es de 1 mm, el error de exactitud que introduce aquí el método es de 2 a 4 mm.

Si se miden tiempos con un cronómetro centisegundo activando manualmente el instrumento y no con un sistema eléctrico, la exactitud de la medición no será de 0,01 s. sino de 0,1 s o más, teniendo en cuenta el tiempo del mecanismo fisiológico que debe desarrollarse para apretar un dispositivo.

Con estos breves ejemplos queremos destacar que cada método de medición puede introducir errores cuyo efecto es el aumentar el error de exactitud de la medición por arriba del que cometen los instrumentos. De acuerdo con la complejidad de la medición puede resultar más o menos complicado detectar el origen del error y estimar su valor. En ocasiones no puede ser precisado más que el orden de magnitud, esto es, el orden de base 10 (decenas, unidades, milésimas, etc.) afectado por el error del método. En tal caso se reportan en el resultado sólo las cifras exactas de la medición, se sobreentiende entonces que el error es menor que la última cifra reportada.

1.4 REDUCCION DE ERRORES SISTEMATICOS A ALEATORIOS.

Para poder evaluar la influencia de algunos errores sistemáticos que a veces ni sospechamos, lo más conveniente es variar el método de medición para que la sistematicidad del error se pierda y se convierta en error aleatorio, el cual puede ser evaluado estadísticamente como veremos más adelante.

Si queremos medir la conductividad eléctrica de un líquido y queremos desechar la influencia de posibles sales disueltas, lo más aconsejable es tomar varias muestras del líquido con el máximo grado de pureza químicamente posible, y efectuar las mediciones en una y otras muestras, las pequeñas diferencias en los resultados podrán depender aleatoriamente de concentraciones de impurezas tan bajas que ya escapan al control técnico de purificación, y el error debido a estas diferencias podrá ser evaluado estadísticamente como errores casuales.

De manera análoga, el error sistemático en la medición de la densidad de un metal debido a una burbuja de aire puede evaluarse midiendo la densidad de muchas muestras del mismo metal para tratar de reducir el efecto de burbujas que pudieran estar presente en algunas de las muestras. La existencia o no de burbujas es casual, y las diferencias entre las distintas densidades permitirán evaluar el error como casual.

El error sistemático que se cometería midiendo el diámetro de una esfera por una misma dirección se convierte en casual midiendo varios diámetros en distintas direcciones.

En general, repetir una medición con algunas variaciones en el método es aconsejable para que los posibles errores no detectados afloren como errores aleatorios que pueden ser evaluados estadísticamente. Esto puede incluir la repetición de la medición con distintos instrumentos para que los errores producidos por los desajustes de cada uno disminuyan al hacer el tratamiento estadístico de todos ellos.

1.5 INFLUENCIA DE LOS ERRORES ALEATORIOS, SISTEMATICOS Y DE EXACTITUD EN LA DETERMINACION DEL METODO A SEGUIR EN UNA MEDICION.

Al comenzar una medición deben chequearse las condiciones de trabajo de cada instrumento(horizontalidad de los que así lo requieran, temperatura de trabajo, etc.) y las condiciones de montaje experimental (aseguramiento de vacío si así lo requiere, buen balanceo de poleas y ruedas, etc.) para evitar equivocaciones (errores groseros) y detectar fuentes de errores sistemáticos, para eliminarlos o para evaluarlos y emplearlos como enmiendas en cada lectura.

Al comenzar a realizar las mediciones, deben hacerse cuatro o cinco mediciones de prueba para detectar si los errores aleatorios influyen apreciablemente en las mediciones o no; si alguna de estas mediciones presenta ligeras variaciones en relación con otras, entonces cada operación de medición deberá repetirse muchas veces durante el experimento para poder calcular el resultado de las mediciones como el promedio aritmético de todas ellas y procesar estadísticamente los resultados para calcular el error casual del promedio aritmético que se reporte.

Por el contrario, si al hacer las mediciones de prueba se repite siempre el mismo valor, significa que los errores casuales quedan enmascarados por el error de exactitud de la escala y resultan tan pequeños que no vale la pena tenerlos en cuenta. En este caso, con hacer una sola medición de cada magnitud de interés será suficiente y no habrá que calcular errores casuales.

1.6 MEDICIONES DIRECTAS E INDIRECTAS. PROPAGACION DE COTAS DE ERRORES.

Cuando medimos una magnitud haciendo la lectura de su valor sobre la escala de un instrumento, estamos realizando una medición directa. Por otra parte, si medimos una magnitud mediante operaciones de cálculo con otras magnitudes, estamos realizando una medición indirecta.

Las mediciones indirectas permiten determinar valores de magnitudes que de otra manera sería muy difícil de conocer. Por ejemplo, la masa de los cuerpos se mide directamente por medio de la balanza; ahora, no tiene sentido medir la masa de un átomo mediante el instrumento. En este caso, hay que recurrir a las mediciones de otros parámetros que se pueden vincular con la masa del átomo mediante ecuaciones, y a través de ellas calcular la masa deseada.

Lo que nos ocupa ahora es lo siguiente: cuando en las operaciones de cálculo se multiplican dos valores, de algún modo se multiplican también sus errores, y el resultado del cálculo está afectado de un nuevo error. Lo mismo ocurre con cualquiera otra operación (suma, potencia, cociente, raíz, evaluar una función trigonométrica, logarítmica, etc.). De tal modo, los errores de las magnitudes medidas directamente participan en las operaciones y se propagan hasta el resultado. Cómo determinar el error del valor calculado conociendo los errores de las magnitudes que participan en la operación? La técnica de propagación de errores es la que da respuesta a esta pregunta.

a) Propagación de cotas de errores en la suma.

Sean dos magnitudes medidas A y B con cotas de error δA y δB.

La suma de estas magnitudes es:

$S = A + B$ (6)

Si tenemos en cuenta las cotas de errores habría que plantear:

$S \pm \delta S = A \pm \delta A _{+} + B \pm \delta B$

ó $S \pm \delta S = (A + B) \pm (\delta A + \delta B)$

De tal modo, la cota de error de la suma, δS, es la suma de las cotas de errores:

$\delta S = \delta A + \delta B$ (7)

Esta regla es válida para más de dos sumandos.

b) Propagación de errores en la resta.

Sea: $D = A - B$;

donde A y B tienen cotas de errores δA y δB

Por procedimiento similar se llega a que la cota de error de la diferencia es la suma de las cotas de errores:

$$\delta D = \delta A + \delta B \qquad (8)$$

Esta regla es válida para varios términos restados.

c) Propagación de errores en el producto:

Sea $P = AB$ donde A y B tienen cotas de errores δA y δB

Entonces:

$P \pm \delta P = (A \pm \delta A)(B \pm \delta B)$

desarrollando este producto queda:

$\delta P = A\,\delta B + B\,\delta A \pm \delta A\,\delta B)$

dividiendo ambos miembros por el producto AB, y despreciando el producto de las cotas de error $\delta A\,\delta B$, queda:

$$\frac{\delta P}{P} = \frac{\delta A}{A} + \frac{\delta B}{B} \qquad (9)$$

que nos da la regla de propagación de errores en el producto: La cota de error relativo de un producto es la suma de las cotas de errores relativos de los factores. La regla es válida para más de dos factores.

A partir de la expresión (9) puede calcularse el error absoluto del producto.

$$\delta P = P\left(\frac{\delta A}{A} + \frac{\delta B}{B}\right) \qquad (10)$$

d) Propagación de cotas de errores en el cociente.

Sea $C = A/B$ donde A y B tienen cotas de error δA y δB. En este caso, el valor máximo de C se obtiene cuando se divide el valor máximo del numerador entre el mínimo valor del denominador, y el valor mínimo de C se obtiene a la viceversa.

Por un procedimiento algebraico sencillo se obtiene para el cociente una expresión similar a la del producto. En resumen, para el cociente:

$$\frac{\delta C}{C} = \frac{\delta A}{A} + \frac{\delta B}{B} \qquad (11)$$

Así, la cota de error relativo del cociente es la suma de las cotas de errores relativos del numerador y del denominador. Si generalizamos las reglas de propagación de errores para el producto y el cociente, tenemos, si:

$M = \frac{A.B.C}{D.E}$ que:

$$\frac{\delta M}{M} = \frac{\delta A}{A} + \frac{\delta B}{B} + \frac{\delta C}{C} + \frac{\delta D}{D} + \frac{\delta E}{E} \qquad (12)$$

e) Propagación de cotas de error en potenciación y radicación:

Si $M = A^n$ donde n puede ser mayor que 1‘ (potenciación) o menor que 1 (radicación) y A se ha medido con una cota de error δA, que cota de error resulta para M?

Tendremos:

$M \pm \delta M = (A \pm \delta A)^n$

Desarrollando por el binomio de Newton, dividiendo ambos miembros por A^n , despreciando los términos que contienen las potencias de exponentes 2 y mayores de la cota de error δA, queda,

$$\frac{\delta M}{M} = n\frac{\delta A}{A} \qquad (13)$$

Luego, la cota de error relativo de la potencia de un número aproximado es n veces la cota de error relativo del número. Calculado el error relativo, se procede al cálculo del error absoluto

$$\delta M = M(n\frac{\delta A}{A}) \qquad (14)$$

1.7. CIFRAS QUE SE REPORTAN EN LOS ERRORES.

Cuando hacemos una medición directa, reportamos hasta la cifra correspondiente a la exactitud del instrumento empleado; si el error de calibración del instrumento lo permite puede añadirse una cifra más de apreciación visual. La última cifra reportada está afectada por el error del instrumento y no tiene sentido escribir más cifras.

Cuando hacemos una medición indirecta, el error de la medición se calcula propagando las cotas de errores de las magnitudes empleadas

para el cálculo. A diferencia de los errores de exactitud, estos errores calculados por propagación, se obtienen en general con tantos decimales como se quiera. Cuántas cifras significativas tomar para el error y cuántas cifras dudosas agregar al resultado de la medición? Para encontrar una respuesta razonable, téngase en cuenta que una medición de alguna seriedad debe tener al menos una cifra exacta y una dudosa (si la única cifra reportada fuera dudosa, la precisión de la medición sería muy pobre)Un límite de precisión aceptable es el dado por un error relativo de un 10% que se corresponde con resultados como (1,4 ± 0,1) unidades, ó (3,1 ± 0,1) unidades; una buena medida puede tener una precisión del 0,01% y ya más precisas son de alta calidad.
Una medida buena, como h=(6,626 ± 0,003).10^{-34} J.s (constante de Planck) tiene una precisión de 3/6626 = 4,5.10^{-4} lo que representa una cota de error relativo del 0,045%.Que variación implica en la precisión si se hubiese tomado h=(6,6260 ± ±0,0031).10^{-34} J.s. La cota de error para la misma constante sería ahora 31/66260 = 4,7.10^{-4} que corresponde a un 0,047 y como se ve no implica una variación apreciable.

Así, reportar con dos cifras el error no resulta significativamente diferente a hacerlo con una sola. La práctica generalizada es la de redondear el error a una sola cifra.

Cuando la medición es de alta calidad, el redondeo del error a una cifra se hace sólo si esto no produce una variación mayor del 10% en el error. Así, un error de 5,4 puede redondearse a 5 pues la variación es de 4/54 = 0,076, o del 7,6%; igual que uno de 0,87 puede redondearse a 0,9 pues la variación es de 3/87= 0,035 o del 3,5%. En cambio,1,3 no se redondearía a 1 pues la variación sería de 3/13 = 0,23 o del 23 % ni 2,4 se redondearía a 2 pues la variación sería 4/24 = 0,17 o 17%.

Por otra parte, las cifras que se reportan en el resultado de la medición incluyen siempre los órdenes de base 10 en que se encuentran las cifras del error, pero no más cifras que esas. Así podrían reportarse valores como los siguientes:

(1,342 ± 0,005) s
(12,372 ± 0,016) kg
(8,94 ± 0,03) m
(3,52 ± 0,23).10^{-4} J

No tendría sentido reportar resultados como estos:

(2,3945 ± 0,04) N
(293 ± 0,047) kg
(7,98 ± 0,002) J

$(5,4838 \pm 0,673)$ m/s

Explique en cada caso cuál es la incongruencia.

Señalemos finalmente, que en cálculos intermedios es recomendable trabajar con una cifra de más respecto a las que admite el error; o sea, aunque la regla del producto de números aproximados nos advierte que el resultado no tiene más cifras que el factor con menor cantidad de dichas cifras, de todos modos conservaremos una cifra de más si tal producto es un cálculo intermedio y no el que nos fija el resultado final de la medición; esto evitará que los redondeos intermedios aumenten más el error final. Si propagamos errores, será el error resultante el que nos indique qué cifras cortar del resultado.

Así, nos interesa calcular una densidad como el cociente(masa/volumen), y a su vez el volumen tendremos que calcularlo primero como (largo x ancho x alto), será recomendable llevar el volumen con una cifra de más al cálculo de la densidad, y solo al final hacer el corte de cifras y redondeos, de acuerdo con el calculo de propagación de errores. Con el empleo de las calculadores electrónicas, no implican ningún trabajo extra mantener todas las cifras que resultan de los cálculos intermedios y hacer el redondeo solo al final.

2.REGLAS PRACTICAS PARA EL TRABAJO CON NUMEROS APROXIMADOS.

Se llama número aproximado, representativo de cierto valor verdadero, a uno cuyo valor es cercano al valor verdadero que representa. Así, 1,4142 es un número aproximado de $\sqrt{2}$ y 0,8660 es un número aproximado de cos 30° .

Se llama cifra exacta de un número aproximado a toda la que difiere en menos de una unidad de la cifra del valor verdadero correspondiente a su mismo orden entero o decimal. La primera cifra exacta es la de mayor orden (entero o decimal) siempre que no sea cero, y a partir de ella son exactas todas las siguientes que cumplan con la condición antes dicha. Al llegar a una cifra que difiera en más de una unidad de la correspondiente en el valor verdadero, ya esta no es exacta, y la última anterior es la que fija el orden de exactitud de la aproximación; las siguientes cifras correspondientes a órdenes menores tampoco son exactas y carecen de significación.

Si $\sqrt{2}$ es el valor verdadero de cierta magnitud, tanto 1,41 como 1,42 representan a $\sqrt{2}$ con 3 cifras exactas, pues ambos difieren de $\sqrt{2}$ en menos de 0,01 ($1,41 < \sqrt{2} < 1,42$)pero 1,45 sería una aproximación a $\sqrt{2}$ que contendría sólo 2 cifras exactas, ya que la tercera difiere en más de una unidad del orden de las centésimas. Así, 1,41 y 1,42 son aproximaciones de $\sqrt{2}$ exactas hasta la centésima, y 1,45 es exacta hasta la décima.

Un número mismo. Así, 1,41 es una aproximación por defecto de $\sqrt{2}$ y 1,42 es una aproximación por exceso. Si comparamos estos valores aproximados con los de otra aproximación más exacta, $\sqrt{2}$=1,4142, podemos notar que el valor es aproximado por exceso cuando supera el valor verdadero y por defecto si es inferior al 1,41 está más próximo a $\sqrt{2}$ que el 1,42, aunque tanto 1,41 como 1,42 tienen 3 cifras exactas, el 1,41 es una aproximación mejor o más exacta.

En general, en las mediciones físicas tratamos de hacer siempre los redondeos de cifras al valor más próximo para lograr con ello la aproximación más exacta. Con el redondeo al valor más próximo se asegura que el número aproximado difiera del valor verdadero en menos de media unidad del orden (entero o decimal) correspondiente a la última cifra exacta.

Un número representativo de una magnitud física es aproximado de por sí, pero el valor verdadero se desconoce en principio y lo más que podemos asegurar es el valor del error mayor que puede estar afectando a la medición aproximada.

Supongamos que en el cálculo de un desplazamiento con las fórmulas de la cinemática encontramos que x=(260 $\pm$ 9) m; aquí las dos primeras cifras (centenas y decenas) son exactas, pero la última (el cero de las unidades) no lo es. En Física la cifra de una medición, afectada de algún error mayor que la unidad de su orden de base 10, tiene aún alguna significación, pues a partir de ella, y del error, es que pueden calcularse los valores extremos posibles de la magnitud calculada (264 y 251 en el ejemplo). Definiremos como **cifras significativas** de una medición a las exactas más la dudosa del siguiente orden (entero o decimal); esta última ya está afectada de un error mayor o igual que la unidad del orden a que pertenece.

Así en x = (260 $\pm$ 9) m hay 3 cifras significativas del resultado serán las exactas más las dos dudosas que se corresponden con los órdenes de base 10 del error.

En los trabajos de laboratorio se realizan los cálculos con todas las cifras significativas (las exactas y la dudosa) y se acompaña de un cálculo de errores para conocer cual es el error del resultado, a partir de los errores de los datos.

Presentaremos ahora algunas reglas de operaciones con números aproximados teniendo en cuenta solo sus cifras exactas. El objetivo de estas reglas es fijar la cantidad de cifras exactas que tiene el resultado conociendo las cantidades de cifras exactas que tienen los datos y despreciar las cifras no exactas que resultan del cálculo, haciendo los redondeos pertinentes.

Ante todo, aclararemos cómo reconocer la cantidad de cifras exactas en un número aproximado, teniendo en cuenta los ceros:

1. No son exactos los ceros que aparezcan a la izquierda de la primera cifra no nula.
2. Son exactos los ceros a la derecha de la primera cifra no nula.

Así, en el número aproximado 0,023, exacto hasta las milésimas, hay dos cifras exactas (el 2 y el 3). En el número 10,42, exacto hasta la centésima, hay cuatro cifras exactas (todas las escritas). En el número 0,0940 hay tres cifras exactas, si su exactitud es hasta la diezmilésima.

Las cifras no exactas de un número aproximado no se escriben nunca; se escribe hasta la última exacta.

El criterio para determinar las cifras significativas es el mismo que para las exactas, añadiendo entonces una o dos cifras dudosas según se reporte el error con una o dos cifras.

Veamos ahora las reglas de cálculo con números aproximados a partir de ejemplos numéricos.

2.1 SUMA Y RESTA DE NUMEROS APROXIMADOS.

Sea una mesa que tiene 1,25 m de altura, sobre la cual hay una caja de 32,4 cm de altura y arriba de esta una esfera de 4,78 cm de diámetro. Qué altura sobre el piso tiene el punto superior de la esfera? La respuesta matemática a este problema consiste en sumar las tres alturas.:

h = (125 + 32,4 + 4,78)cm.

Ahora bien, aunque en las matemáticas exactas se tiene que 125 = 125,00 y 32,4 = 32,40, en la suma que efectuamos el número aproximado 125 no podemos representarlo por 125,00 ya que después del 5 no se sabe que cifras van (si se supiera se hubieran reportado en el dato). Si colocamos un signo de interrogación en la posición de cada cifra desconocida, la suma quedaría así:

$$\begin{array}{r} 125,?? \\ 32,4? \\ \underline{4,78} \end{array}$$

Como se ve, en las décimas y centésimas la suma queda indefinida. En estos casos se redondean todos los sumandos al orden de base 10 menor en que la suma esté bien definida; en el presente ejemplo son las unidades. Así,

125 + 32 + 5 = 162 cm.

Y el resultado no admite mayor exactitud de acuerdo con la exactitud de los datos.

Del ejemplo visto y de otros casos similares puede inferirse la siguiente regla:

" Cuando se suman o restan varios sumandos, el resultado no puede tener más cifras exactas (órdenes de base 10) que las correspondientes al orden de base 10 del número menos exacto".

O sea, si un sumando es exacto hasta las unidades, otro hasta las décimas y otro hasta la milésima, el resultado tiene exactitud sólo hasta las unidades.

2.2.PRODUCTO Y COCIENTE DE NUMEROS APROXIMADOS:

Sea una cinta de papel que tiene 2,3 cm de ancho por 25,18 m de largo. Cuál será el área de la superficie de esta cinta?

Conociendo que los datos son exactos hasta la última cifra reportada para cada uno, el ancho tendrá como valores extremos posibles 2,2 cm y 2,4 cm, esto es, (2,3 ± 0,1) cm. Igualmente, la longitud podrá tener su valor verdadero entre los extremos 25,17 y 25,19 m, o sea, una unidad por arriba y por debajo del ultimo orden decimal reportado.

Con los datos a = 2,3 cm y l = 25,18 m = 2518 cm, el área calculada será A = l. a = 2518. 2,3= 5791,4 cm^2.

Pero los valores extremos posibles del área serían:

$A_{max} = l_{max}.a_{max} = 2519.\ 2,4 = 6045,6\ cm^2$.
$A_{min} = l_{min}.a_{min} = 2517.\ 2,2 = 5537,4\ cm^2$.

·De comparar los tres resultados se ve que solo la primera cifra es exacta (la de los millares) pues las diferencias entre los tres es menor que un millar, pero los centenares ya no son exactos, existiendo más de dos centenares de diferencia entre A y A_{min} y entre A y A_{max}

En definitiva, un factor del producto tenía 2 cifras exactas(2,3) y el otro tenía 4 (25,18); en tanto el resultado del producto tenía una cifra exacta. Ha resultado un número con una cifra exacta menos que el factor que menos cifras exactas tenía (de dos cifras exactas en un dato se redujo a una cifra exacta en el resultado). A esta misma conclusión se podría llegar con otros muchos ejemplos.

Hay, sin embargo, otra situación. Si a la cinta anterior se le hubiesen medido l = 502 cm y a = 4,1 cm, el área hubiera resultado:

$A = l.a = 502.4,1 = 2058,2\ cm^2$

Los valores extremos hubiesen sido:

$A_{max} = l_{max}\ a_{max} = 503.\ 4,1 = 2112,6\ cm^2$
$A_{min} = l_{min}\ a_{min} = 501.\ 4,0 = 2004,0\ cm^2$

En este caso

$A - A_{max} = 54,4$ cm^2
$A - A_{min} = 52,2$ cm^2
Por lo que son exactas las cifras de los millares y de los centenares, y sólo las decenas dejan de ser exactas. En este caso, el resultado del producto tiene tantas cifras exactas como el factor que menos cifras exactas tenían.

En general ocurre una de las dos situaciones presentadas; aunque en la teoría de errores se dan reglas para averiguar cuándo se da un caso y cuándo otro, nosotros usaremos aquí una regla única; esta funciona igual con productos y con cocientes:

“ El resultado del producto o del cociente entre dos números aproximados nunca tiene más cifras exactas que el factor de menor cantidad de estas cifras”.

En la práctica escribiremos el resultado con tantas cifras como las que tiene el factor que tenga menos.

Detengámonos ahora en la forma de escribir el resultado. En el segundo ejemplo obtuvimos A = 2058,2 cm^2 y concluimos que sólo las dos primeras cifras son exactas; qué hacer con las restantes? No pueden transformarse en ceros, pues los ceros a la derecha si son exactos, y escribir A = 2000 cm^2 significaría contar con 4 cifras significativas.

Aquí lo recomendado es utilizar la notación científica. Esto es, expresar el número como un entero seguido de decimales hasta completar la cantidad de cifras exactas que haya, y multiplicarlo todo por la potencia de 10 que convenga. Así, expresaríamos:

$A = 2,1.10^3$ cm^2

donde se ha hecho el redondeo:

$2058 \approx 2060 \approx 2100 \approx 2,1.10^3$

Verifique que este resultado difiere menos de $0,1.10^3$ de los resultados extremos.

Un detalle que debemos advertir es el siguiente: cuando se multiplican o dividen un número aproximado y uno exacto, solo el aproximado impone limitaciones a las cifras del resultado pero no el exacto. Esto es, el producto de un número exacto por uno aproximado tiene tantas cifras exactas como el aproximado.

A manera de resumen, diremos que:

1. **Nunca una suma o resta puede resultar más exacta (en orden entero o decimal) que el menos exacto de los sumandos.**
2. **Nunca un producto o cociente puede resultar con mayor cantidad de cifras exactas que el factor con menor cantidad de ellas.**

3. PROCESAMIENTO DE ERRORES CASUALES:

3.1 VALOR MEDIO.

Sean x_1, x_2,x_3 ,.......x_n los valores medidos a una magnitud en n mediciones Cuál será el valor más representativo del conjunto para reportar el resultado?. La estadística nos demuestra que este valor es conocido como media aritmética del conjunto de mediciones o simplemente valor medio.

Queda ahora el siguiente problema:**Con cuántas cifras expresar el valor medio?** .Anteriormente señalábamos que el valor medio no puede reportarse con más exactitud que las de las mediciones individuales; pero nos preocupa ahora lo siguiente: **Podrá reportarse siempre con tanta exactitud como la de las mediciones individuales o se perderá en algún caso alguna cifra significativa?.** Es fácil notar que al dividir la suma entre n el resultado podría dar infinitas cifras decimales:**En qué orden de base 10 truncar el resultado?** Responder a esa pregunta implica poder evaluar de alguna forma el error estadístico del valor medio; evaluando dicho error conoceremos a partir de cuál cifra del valor medio comienza su incertidumbre, y aplicaríamos los criterios de redondeos y cifras significativas estudiados anteriormente. Los errores sistemáticos suponemos que han sido eliminados del experimento o usados como correcciones en el resultado. El error de exactitud de la escala, por otra parte, fija un límite inferior por debajo del cual carecería de sentido evaluar incluso los errores casuales, o estadísticos, que de hecho son detectados sólo cuando superan el error de exactitud de las escalas.

Pasemos a evaluar el error de la media.

3.2 .DESVIACION TIPICA. INTERVALO DE CONFIANZA DE LA DESVIACION TIPICA.

Existen varios criterios diferentes para evaluar de algún modo el error casual de un experimento aleatorio. Vamos a hacer énfasis solo en dos de ellos, que son los de uso más generalizado y los mejor fundamentados por la Teoría de probabilidades y la Estadística Matemática: La desviación típica, σ y el error de la media o error aleatorio, δx.

Llamamos desviación de una medición δx a la diferencia entre el valor x_i de dicha medición y el valor medio, x_m de la serie completa de mediciones:

$$\delta x_i = x_i - x_m \qquad (15)$$

Esta desviación puede ser positiva o negativa. Su cuadrado es siempre positivo. Si sumamos todas las desviaciones cuadráticas y dividimos el número n de mediciones, estaremos calculando la media de los cuadrados de las desviaciones. Sacándole la raíz cuadrada se tendrá la raíz media cuadrática de las desviaciones:

$$\sigma_{rmc} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i - x_m)^2} \qquad (16)$$

El subíndice rmc indica “raíz media cuadrática”.

Dado que el valor x_m se calcula a partir de las x_I se establece una dependencia matemática entre estas variables, por lo que de los n sumandos,$(x_i - x_m)^2$, solo (n – 1) son linealmente independientes. A partir de este hecho se demuestra que es más confiable tomar como medida más representativa de las desviaciones no la raíz media cuadrática sino la siguiente expresión, que define a la llamada desviación típica (o desviación standard)

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(x_i - x_m)^2} \qquad (17)$$

Cuando hay muchas mediciones (n >30), la diferencia entre σ y σ_{rmc} es totalmente despreciable. Para bajos valores de n es conveniente usar la desviación típica que la raíz media cuadrática.

Si el conjunto de mediciones x_i es llevado a un histograma y la curva de distribución resulta una campana simétrica (ver figura No.3.1), la desviación típica resulta un parámetro importante de la función matemática que describe a dicha curva:

$$f' = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_m)^2}{2\sigma^2}} \qquad (18)$$

Esta es la llamada función de distribución normal o de Gauss. El cálculo de esta función está basado en conceptos probabilísticos y representa la curva continua que más aproximadamente se ajusta al perfil de los histogramas simétricos.

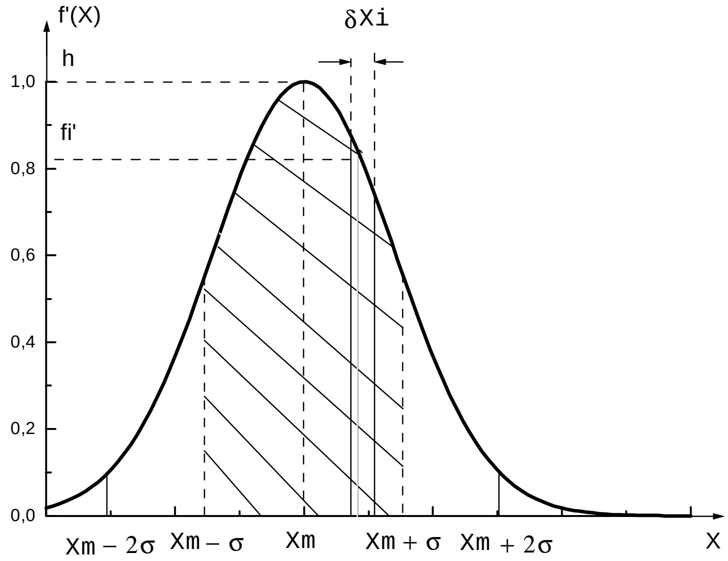


Figura No.3.1

En la ecuación (18) x_m representa el valor medio de la serie de mediciones, σ su desviación típica y x, los valores posibles de las distintas mediciones. La interpretación de f', para la curva continua no es la de frecuencia relativa pero se relaciona con ella del siguiente modo: el producto de cada valor f' de la curva por un intervalo δx_i muy estrecho de la variable medida (fig.3.1) da la frecuencia relativa con que ocurren resultados de la medición es ese intervalo $\delta\, x_i$ de valores.:

$f_i = f'_i \,.\, \delta\, x_I$ (19)

A la función f' se le conoce como densidad de frecuencia relativa por cada unidad de intervalo de medición δx_i, como se desprende de despejar la ecuación (19).

$f' = \dfrac{f_i}{\delta x_i}$ (20)

La propia Teoría de Probabilidades demuestra que el área bajo la curva de densidad de frecuencias relativas es siempre la unidad, y que el producto de la altura h del pico por la desviación típica es constante e igual a

$h\sigma = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (21)

O sea, si h aumenta (pico mas alto), σ debe disminuir; como además el área bajo la curva es constante, al aumentar h, el ancho de la curva debe disminuir también. De este modo la desviación típica resulta una medida natural del ancho de la curva: un valor grande de σ significará una curva de distribución ancha y baja (mucha dispersión en las mediciones); un valor pequeño de σ significará una curva alta y estrecha (poca dispersión en las mediciones: mayor precisión en las mediciones).

La teoría de las probabilidades demuestra que el 68,3% de las mediciones(más de la mitad) caen entre los valores:
$x_1 = x_m - \sigma$ y $x_2 = x_m + \sigma$, que es la zona rayada de la figura 3.1 (68,3% del área total de la curva); igualmente el 95,4% de las mediciones caen entre $x_m-2\sigma$ y $x_m+2\sigma$; y el 99,7% caen entre $x_m-3\sigma$ y $x_m+3\sigma$. Conviene recordar estos porcentajes por su gran utilidad: con ellos, y conociendo σ se pueden estimar rápidamente las cantidades de mediciones que deben caer dentro de los intervalos $\pm\ \sigma$, $\pm\ 2\sigma$ y $\pm\ 3\sigma$ alrededor del valor medio x_m . Estos estimados son válidos sólo para curvas de distribución simétrica; en la medida que aumente la asimetría dejarán de ser significativos estos estimados. La función de distribución de Gauss permite también calcular el número de mediciones que estadísticamente (por probabilidades)deben arrojar valores de x en un intervalo de interés cualquiera, no solo $\pm\ \sigma$, 2σ y $\pm\ 3\sigma$. Si llamamos u al número que multiplicado por σ da el intervalo de interés, llamado intervalo de confianza, la función de distribución de Gauss permite estimar el número de valores que se obtienen en dicho intervalo $\pm$ u σ alrededor del valor medio; para esto se hace uso σ de la **tabla 3.1** que está elaborada a partir de ciertos cálculos realizados con la función de Gauss.

Así, si en una serie de 80 mediciones de voltaje se obtiene x = 76,4 V con σ = 0,3 V y estamos interesados en averiguar que cantidad aproximada de mediciones se obtuvieron en un intervalo de 0,5 V, basta calcular u = 0,5/0,3 = 1,67, buscar en la tabla 3.1 l valor mas cercano (u = 1,70) y observar que frecuencia relativa corresponde a ese intervalo u, obteniéndose f = 0,91. Entonces: 0,91.80 = 72,8 = 73. O sea, de ls 80 mediciones, unas 73 caen dentro del intervalo $\pm$ 0,5 alrededor del valor medio.

Tabla 3.1

u	f	u	f	u	f
0,00	0,00	1,20	0.77	2,60	0,990
0,05	0,04	1,30	0,80	2,70	0,993
0,10	0,08	1,40	0,84	2,80	0,995
.0,15	0,12	1,50	0,87	2,90	0,996
0,20	0,16	1,60	0,89	3,00	0,997
0,30	0,24	1,70	0,91	3,10	0,9981
0,40	0,31	1,80	0,93	3,20	0,9986
0,50	0,38	1,90	0,94	3,30	0,9990
0,60	0,45	2,00	0,95	3,40	0.9993
0,70	0,51	2,10	0,964	3,50	0,9995
0,80	0,57	2,20	0,972	3,60	0,9997
0,90	0,63	2,30	0,978	3,70	0,9998
1,00	0,68	2,40	0.984	3,80	0,99986
1,10	0,73	2,50	0,988	3,90	0,99990
				4.00	0.99993

Donde:
u = semiancho del intervalo de interés(en unidades σ)
f = frecuencia relativa de ocurrencia de la medición.

Esta tabla de frecuencias relativas en intervalos de $\pm u\,\sigma$, calculadas a partir de la función de Gauss, es válida con exactitud solo cuando el número de mediciones es mayor de 30. Cuando se hacen menos mediciones debe emplearse otra tabla mas exacta (los llamados coeficientes de Student) en el que las frecuencias relativas dependen no solo del intervalo u σ que se analice sino del número n de mediciones realizadas (esta dependencia se pierde para $n > 30$ y los valores coinciden con los de la tabla 3.1).

3.3 ERROR DE LA MEDIA. INTERVALO DE CONFIANZA DEL ERROR DE LA MEDIA.

La desviación típica, aunque permite caracterizar matemáticamente las desviaciones de las mediciones respecto al valor medio, no se emplea como medida directa del error del valor medio, o simplemente error de la media.El valor de σ nos permite calcular la probabilidad de que una medición aislada caiga dentro de un entorno dado alrededor del valor medio (empleando el mismo método y los mismos instrumentos), pero no caracteriza el error de la serie completa de mediciones; esto es, si se realiza otra serie de mediciones y se calcula el nuevo valor medio difiere del anterior en un valor mucho menor que σ.Para un método de medición de determinada precisión, el ancho de la curva de distribución no puede variar significativamente por muchos ensayos que se hagan: la estrechez de la curva depende de los instrumentos empleados y el método seguido, y esto no cambia en toda la serie de mediciones. Sin embargo, la repetición de más y más mediciones, aumentando indefinidamente el número de ensayos, deben conducir a un valor cada vez más preciso. Un aumento de precisión en cierta magnitud implica una disminución progresiva del error de la media, lo que debía ocurrir al aumentar n y no es lo que ocurre con σ.

La teoría de las probabilidades demuestra que el error de la media δx_m ,se relaciona con la desviación típica σ y el número de mediciones, n , por la ecuación:

$$\delta x_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (22)$$

o lo que es igual:

$$\delta x_m = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_1^n (x_i - x_m)^2} \qquad (23)$$

Se ve que al aumentar el número de medicines, el error del valor medio o error de la media, disminuye.

En conclusión, el resultado que se reporta al final de la serie de mediciones es:

$$x = x_m \pm \delta x_m \qquad (24)$$

Si el valor medido de x debe utilizarse en algún cálculo posterior, el error que se emplea en los cálculos de propagación de errores es δx_m y no σ.
Del mismo modo que una medición aislada puede caer en un intervalo $\pm\sigma$ alrededor de x_m , con un 68,3% de probabilidad, se demuestra estadísticamente que una nueva serie de mediciones dará un valor medio que caerá dentro del intervalo $\pm\delta x_m$ con una probabilidad de 0,683.

En principio, del mismo modo que la tabla 3.1 permite encontrar la probabilidad (o frecuencia relativa) de que una medición aislada caída en un intervalo $u\sigma$, puede emplearse igualmente dicha tabla para calcular la probabilidad de que el valor medio x_m medido sea válido dentro de un intervalo de error igual ($u.\delta x_m$), donde este δx_m es el expresado por la ecuación (23)Cuando el error reportado es δx_m sin más aclaración, se asume que tiene una probabilidad de confianza, o nivel de confianza, de 0,683; si por algún motivo conviene reportar el resultado con un nivel de confianza mayor (0,99, 0,95, etc.), el error que se reporte no será δx_m sino $u.\delta x_m$, donde u se calcula por la **tabla 3.1**. Al producto $u.\delta x_m$ se le denomina intervalo de confianza del valor medio x_m con intervalo de confianza:

$$u.\sigma/\sqrt{n} \qquad (25)$$

Cuando el valor medio x se reporta afectado de un intervalo de confianza , $u\delta x_m$, distinto al error de la media, debe aclararse al lado el nivel de confianza del intervalo reportado: $x_m \pm u.\delta x_m$ con un nivel de confianza f dado por la **tabla 3.1.**

Se aprecia de la ecuación (25) que si queremos disminuir el error aleatorio del valor medio, esto es, disminuir el intervalo de confianza para un nivel de confianza dado, (para cierto valor de u), puede obrarse de dos maneras: aumentando la precisión de los instrumentos o del método (disminuir σ) o aumentando el número de mediciones.

3.4.COMPOSICION DEL ERROR DE LA MEDIA CON EL DE EXACTITUD.

Si el error de exactitud del instrumento de medición impone un limite a la exactitud de la medición, no tiene sentido seguir aumentando el número n de mediciones más allá de ese límite, pues aunque el error de la media siga disminuyendo, el error total de la medición estará ya prefijado, y seguir midiendo constituirá una pérdida de tiempo. Cómo determinar el número n de mediciones convenientes para no trabajar en exceso? (Téngase en cuenta que el objetivo de hacer muchas mediciones es reducirlos errores puramente aleatorios a valores similares o ligeramente menores que los errores de exactitud de los instrumentos, pero no más)Si en una medición directa se precisan las fuentes de errores sistemáticos, estos pueden ser eliminados por enmiendas, o reducidos a errores aleatorios por variaciones en el método de medición. Al fin y al cabo, al final van a estar presentes solo los errores aleatorios y los de exactitud de los instrumentos. Estos últimos, según analizamos en el epígrafe 4.2, constituyen una limitación de la escala de los instrumentos, y aunque están sistemáticamente presentes en todas las lecturas, con una misma cota de error, su influencia en cada medición posee características aleatorias: en algunas lecturas el redondeo es nulo porque la lectura coincide justamente con una línea de la escala; en otras lecturas es grande el redondeo y en otras, pequeño, según se aproxime desde mas lejos o más cerca de la linea de la escala; a veces es por exceso y a veces por defecto.

En fin, el error de exactitud se presenta como un límite mínimo de errores aleatorios; por debajo del cual es imposible acercarse al valor verdadero de la medición. No es un error aleatorio en sí mismo pues no disminuye con más repeticiones de la medición, pero por sus características puede tratarse como un error aleatorio mínimo insuperable.

Cómo se combinan el error de exactitud de las mediciones con el error de la media para determinar el error total?.

En general, los errores aleatorios cuyos orígenes son independientes, se suman cuadráticamente, del mismo modo que el error de la media se calcula a partir de la suma cuadrática de todas las desviaciones independientes de la serie de mediciones. La única condición que exige la teoría de las probabilidades para suman cuadráticamente errores y desviaciones es que todos los elementos de la suma tengan origen independiente uno de otro: que matemáticamente tengan independencia lineal y no se calculen unos sumandos a partir de otros.

Así, si llamamos e al error de exactitud de una medición directa y δx_m al error de la media, el error total, E, será:

$$E = \sqrt{e^2 + (\delta x_m)^2} \qquad (26)$$

El error de exactitud existe con independencia de que existan o no errores aleatorios. Si al hacer 4 ó 5 veces una misma medición, la exactitud de los instrumentos no nos permite descubrir errores aleatorios, esto significará que $\delta x_m << e$, en cuyo caso el error total de la medición es solo el de exactitud. Es de notar que los orígenes de ambos errores son independientes:

$$E = \sqrt{e^2 + (\delta x_m)^2} = \sqrt{e^2} = \varepsilon \qquad (26.a)$$

En este caso no se hacen muchas repeticiones y basta tomar como resultado la lectura que se repitió en los 4 ó 5 ensayos realizados. Por otra par te, si en 4 ó 5 ensayos se observan variaciones en las mediciones, esto significa que los errores puramente aleatorios son mayores que el error de exactitud.

En este caso, con pocas mediciones x puede ocurrir que:

$\delta x_m \geq 2\varepsilon$

Entonces el error total estará determinado por

$$E = \sqrt{e^2 + (\delta x_m)^2} = \sqrt{(\delta x_m)^2} = \delta x_m \qquad (26.b)$$

A manera de ejemplo., considere que en un experimento se mide la altura media de la arena contenida en un tanque, y que después de medir por 4 ó 5 lugares se obtenga un error de la media δx_m=3 mm las mediciones se hicieron con una escala métrica cuyo error de exactitud es e = 1 mm, Entonces:

$E = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \approx 3{,}1 \approx 3$ mm. O sea, queda $E \approx \delta x_m$

En este caso convendrá repetir más mediciones, recordando que con ello disminuirá el error de la media:

$$\delta x_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ahora, **hasta cuándo convendrá estar repitiendo mediciones?** Esto tendrá sentido hacerlo sólo hasta que δx_m sea ligeramente menor que e, con lo cual ocurrirá que $(\delta x_m)^2 << e^2$ y prácticamente $E \approx e$. Así, si en el mismo ejemplo tenemos en cuenta que e =1mm, no será necesario disminuir δx_m más abajo de 0,5 mm, pues con ello:

$E = \sqrt{1^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{1{,}25} \approx 1{,}1$ mm = e

Así, una medida práctica es no tratar de reducir el error aleatorio de la media mas abajo de la mitad del error de exactitud del instrumento:

$$\delta x_m = e/2.$$

En la práctica, con unas 5 o 10 mediciones podemos hacer un estimado de la desviación típica σ .A partir, entonces, de la ecuación $\delta x_m = \sigma/\sqrt{n}$ y de la exigencia δx_m = e/2 se puede plantear:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n_{min}}} = e/2$$

$$n_{min} = \frac{4}{e^2}\sigma^2 \qquad (27)$$

Lo que nos permite calcular un estimado del número mínimo de mediciones que hacen falta.

Así, en el ejemplo del tanque con arena dijimos que en 4 o 5 mediciones resultó δx_m = 3 mm. Asumamos n = 5, esto significa que el valor de σ fue:

$$\sigma = \sqrt{n}\ \delta x_m = 6{,}7 \text{ mm}$$

Aplicando (27) encontraremos entonces que el número mínimo de mediciones debe ser:

$$n_{min} = \frac{4}{e^2}\sigma^2 = \frac{4.6{,}7^2}{1^2} \approx 180$$

O sea, que debe medirse alrededor de 180 veces la altura de la arena.

Lógicamente, el cálculo de σ con sólo 5 o 10 mediciones es un estimado grosero, por lo que el cálculo de n_{min} hecho con ese valor da solo una idea del número de mediciones necesarias; si son muchas, como en este ejemplo, conviene recalcular n_{min} cuando se hayan hecho 30 mediciones, empleando un valor de σmás confiable. El nuevo valor de n_{min} pudiera ahorrarnos una cuantas mediciones. Por otra parte, medir menos veces de las necesarias significará arrastrar al resultado un error mayor del que era posible, afectando la precisión de la medición, e incluso provocando la pérdida de alguna cifra significativa.

3.5 PROPAGACION DE ERRORES ALEATORIOS.

Con anterioridad se analizaron las reglas de propagación de errores. Vimos la propagación de cotas en operaciones aritméticas (suma, resta, producto, cociente) y la propagación de errores en funciones (x^m , $x^{1/m}$).

Si una variable x se da concierto error aleatorio ± δx_m δ la propagación de este en una función sigue las mismas reglas vistas en el; epígrafe . el error resultante de la propagación sigue siendo aleatorio, con la misma interpretación estadística que el error δx propagado. Por otra parte, la propagación de cotas de errores estudiadas para sumas, restas, productos y cocientes, supone siempre que el error de cada sumando y de cada factor sea justamente el máximo (fijado por la cota de error de cada uno) de modo que el resultado de estas operaciones aritméticas esté afectado siempre del error resultante máximo posible, esto es, resulta una nueva cota de error como resultado de la operación. Los errores aleatorios, si embargo, no son cotas de errores, sino un estimado de la variación que se puede producir entre el valor verdadero de la magnitud y el valor reportado, dentro de cierto nivel de confianza o probabilidad. Una medición aislada, e inclusive, el valor medio de una nueva serie de mediciones podría diferir del valor medio reportado inicialmente en una cantidad mayor que el error de la media; esta posibilidad tiene una probabilidad no nula. Luego, el error de la media no representa una cota de error. Así las cosas, en las operaciones aritméticas no hay que propagar los errores aleatorios como las cotas de errores. Si las magnitudes involucradas en la operación aritmética resultan de mediciones independientes, el error total del calculo estará sujeto al mismo tipo de suma cuadrática que hemos observado con los errores aleatorios independientes que fijan el error aleatorio de una medición.

Si se suman o restan dos valores x_1 y x_2, medidos independientemente, con errores δx_1 y δx_2, el error cuadrático de la suma será:

$$\delta\left(x_1 \pm x_2\right) = \sqrt{(\delta x_1)^2 + \left(\delta x_2\right)^2} \qquad (28)$$

Análogamente, si se realiza una operación entre variables medidas que incluyan productos y cocientes, la composición de errores relativos será también cuadrática. O sea, si

$y = x_1 . x_2 / x_3$ se cumplirá:

$$\frac{\delta y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta x_2}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{\delta x_3}{x_3}\right)^2} \qquad (29)$$

Tanto en la expresión (28) como en la (29), las variables X_1 , x_2 , y la x_3 pueden representar funciones de otras variables ($x_1 = \theta^m$, $x_2 =$ sen θ, $x_3 = e^\theta$) ; en tal caso, el error de cada una se calcula a partir del error de la otra variable y se sustituyen luego al cuadrado en las expresiones (28) y (29) según convenga.

Ejercicio:

El período T de un péndulo simple se relaciona con su longitud l y con la aceleración de la gravedad g por la ecuación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

En un experimento se midió el período varias veces, reportándose T = 2,04 ± 0,02 s; la longitud del péndulo se midió, con una cinta milimetrada, por varios observadores, cada uno con su criterio de hasta que punto del cuerpo colgado hacer la medición, resultando l = 1,042 ± 0,013 m. Calcule el valor de la aceleración de la gravedad con su error aleatorio.

De la ecuación dada se obtiene:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

Recordemos que 4 y π son exactos, por lo que no introducen error. Tomaremos π = 3,14159 (dos cifras más que las reportadas para l) para que las cifras del resultado no queden limitadas por culpa de una baja aproximación de π.

Entonces:

$g = 4 (3{,}14159)^2 . 1{,}042/(2{,}04)^2$

$g \approx 9.885$ m/s^2

Para acotar las cifras significativas calculemos el error aleatorio resultante. Aplicando la ecuación (29) a la expresión:

$g = 4\pi^2 \dfrac{l}{T^2}$, , resulta:

$$\frac{\delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\delta T}{T}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0{,}013}{1{,}042}\right)^2 + \left(\frac{2.0{,}02}{2{,}04}\right)^2} \approx 0{,}23 \text{ m/s}^2$$

Luego, el resultado será:

$g = (9{,}88 \pm 0{,}23)$ m/s^2

3.6 PROPAGACION DE COTAS DE ERRORES Y PROPAGACION DE ERRORES ALEATORIOS: ANALISIS COMPARATIVO.

Al hacer mediciones en ocasiones nos referimos a las cotas de errores y en otras ocasiones nos referimos a los errores de carácter aleatorio. Ya analizamos que estos últimos no son cotas de errores y que deben propagarse cuadráticamente.

Por otra parte, cuando medimos magnitudes mediante una sola lectura (porque no se manifiestan errores casuales), el error que tomamos es el que fija la exactitud de la escala. Este error de exactitud para mediciones que requieren de una lectura única, constituye una cota de error, y su propagación en operaciones donde figuren otras cotas de errores puede realizarse como una propagación lineal de cotas de errores. Ahora bien, los errores de exactitud pueden componerse también cuadráticamente, teniendo en cuenta que ellos representan cotas de errores aleatorios; lógicamente al propagar cuadráticamente los errores de exactitud, el error resultante no representará ya una cota: será un valor un poco más pequeño que la cota , pero más probable como cantidad representativa de la exactitud del resultado obtenido. Para comprender esto tenga en cuenta que es poco probable que todas las magnitudes involucradas en un cálculo, y afectadas solo por su error de exactitud vayan a diferir todas de los valores verdaderos justamente en el error máximo fijado por la cota; esto podría ocurrir, ciertamente, pero es más probable que los errores estén por debajo de sus cotas, en mayor o menor grado. En tal caso, el error más probable en el resultado de la operación debe ser menor que el que resulta de la propagación de cotas. Veamos un ejemplo para aclarar ideas: Medimos el largo y el ancho de un papel, resultando l = 25,4 cm y a = 14,3 cm, con errores de exactitud de ± 0,1 cm, aún cuando repitamos la medida 4 ó 5 veces el resultado es el mismo, lo que significa que el error total es el de exactitud, considerado a la vez como cota.

El área de la superficie del papel es:

A = l.a = 25,4. 14,3 = 363,22 cm^2
sin precisar aún las cifras significativas del resultado.

La propagación de cotas de errores nos lleva a:

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{\delta l}{l} + \frac{\delta a}{a} = .0,1/25,4 + 0,1/14,3$$

= 1,09.10^{-2}.

Luego:

δ A = A(1,09.10^{-2}) ≈ 3,96 ≈ 4 cm^2 y

A = (363 ± 4) cm^2

En este resultado, los 4 cm^2 representan una cota de error del área calculada. En la práctica, teniendo en cuenta que el largo, el ancho o ambas magnitudes, pudieran diferir del valor verdadero en una cantidad menor que la cota de 0,1 cm, es más probable un error en el área menor que 4 cm^2, como el que resulta de la propagación cuadrática:

$$\frac{\delta A}{A} = \sqrt{\left(\frac{\delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\delta a}{a}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0{,}1}{25{,}4}\right)^2 + \left(\frac{0{,}1}{14{,}3}\right)^2} \approx$$

≈ 0,80.10^{-2} y

δA= A(0,80.10^{-2}) ≈ 2,90 ≈ 3 cm^2

Un resultado más razonable sería entonces:

A = (363 ± 3) cm^2 .

3.7 PROPAGACION DE ERRORES TOTALES:

Cuando se miden varias magnitudes físicas A,B, C con el fin de calcular con ellas otra magnitud P, el error total E_p de esta última resultará de la propagación de errores totales de cada magnitud directamente medida.

Siempre que las mediciones de las magnitudes A, B, C se realicen por vías independientes, se calculará el error total E por propagación cuadrática de los errores totales E_A, E_B, E_C .

O sea, si se tuviera, por ejemplo, $P = A^n B^m C^q$, entonces:

$$\frac{E_p}{P} = \sqrt{\left(\frac{nE_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{mE_B}{B}\right)^2 + \left(\frac{qE_C}{C}\right)^2} \qquad (30)$$

Si a su vez una de las magnitudes, digamos la A, es una suma (o resta) de dos magnitudes U y V medidas directamente, entonces,

$$E_A = \sqrt{(E_U)^2 + (E_V)^2} \qquad (31)$$

En estas expresiones, los errores totales de cada magnitud son la suma cuadrática del error aleatorio δ y del de exactitud, e:.

$$E_U = \sqrt{(\delta U)^2 + (e_U)^2}$$

$$E_V = \sqrt{(\delta V)^2 + (e_V)^2}$$

$$E_B = \sqrt{(\delta B)^2 + (e_B)^2} \qquad (32)$$

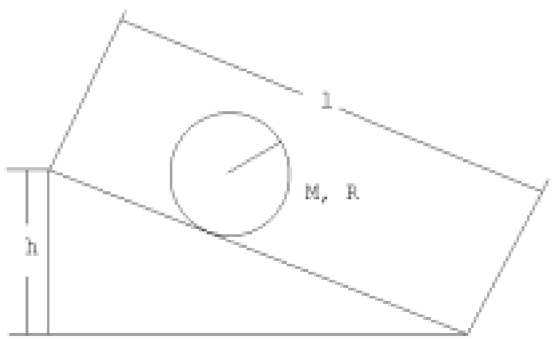
$$E_C = \sqrt{(\delta C)^2 + (e_C)^2}$$

En el siguiente ejemplo se concreta lo aquí expresado.

Ejemplo:

Para medir el momento de inercia I de un cuerpo de contorno circular, respecto a su eje de simetría, se deja rodar el cuerpo a partir del reposo por un plano inclinado de altura h y longitud l, y se mide el tiempo t que demora el recorrido (ver la **figura 3.2**).

Figura No 3.2



Se miden además su masa m y su radio R , con lo cual se puede calcular Io por la ecuación:

$$I_o = MR^2\left(\frac{ght^2}{2l^2} - 1\right)$$

Donde g es la aceleración de la gravedad.
En el experimento se miden una vez **h**, **l** **M** y **R** pues sus errores aleatorios son despreciables frente a los de exactitud ($e_h = e_l = 0{,}1$ cm, $e_M = 0{,}01$ g). El radio del cuerpo se mide 20 veces para reducir el error aleatorio a la mitad de la exactitud ($e_R = 0{,}01$ cm y $\delta R = 0{,}005$ cm) y el tiempo de rodadura se mide treinta veces para reducir el error aleatorio a $\delta t = 0{,}03$ s, que sigue siendo mayor que el de exactitud ($e_t = 0{,}01$ s)

Los valores que resultaron fueron:

h = 12,5 cm; **l** = 140,2 cm, **R** = 2,96 cm , **M** = 164,36 g y **t** =2,43 s. Además, la aceleración de la gravedad y su error total se tomaron de un manual:

g = 978,82 cm/s^2 y E_g= 0,02 cm/s^2

El cálculo de I_o por la ecuación dada conduce al valor I_o =1206 g.cm^2 sin precisar aún las cifras significativas.
De la información dada más arriba se desprende que al aplicar las ecuaciones de composición del error de apreciación con el aleatorio, resulta:

$E_h \approx e_h$ = 0,1 cm ;

$E_l \approx e_l$ = 0,1 cm ;

$E_M \approx e_M$ = 0,01 g

$E_R \approx e_R$ = 0,01 cm y

$E_t \approx \delta t$ = 0,03 s.

En los cuatro primeros casos prevalece el error de exactitud sobre el aleatorio, y en el quinto es al revés.

Para propagar errores aleatorios en la ecuación dada de I, llamemos:

$$A = \frac{ght^2}{2l^2} - 1$$

Aplicando la ecuación (30) a la expresión de I_o , resulta:

$$\frac{E_{Io}}{I_o} = \sqrt{\left(\frac{E_M}{M}\right)^2 + \left(\frac{2E_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{E_A}{A}\right)^2} \qquad (30.a)$$

Calculemos el cociente (E_A /A). Teniendo en cuenta que A es la resta de dos términos, uno de ellos constante(la unidad), el error E_A será el error del primer término.

$E_A = E(g.h.t^2/2.l^2)$

Llamando $U = g.h.t^2 / 2.l^2$, se tendrá que $E_A = E_U$.
Ahora:

$$\frac{E_U}{U} = \sqrt{\left(\frac{E_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{E_h}{h}\right)^2 + \left(\frac{2E_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{2E_l}{l}\right)^2}$$

Y el factor E_A /A será:

$$\frac{E_A}{A} = \frac{\frac{ght^2}{2l}\sqrt{\left(\frac{E_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{E_h}{h}\right)^2 + \left(\frac{2E_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{2E_l}{l}\right)^2}}{\frac{ght^2}{2l} - 1}$$

Sustituyendo en (30.a) la relación $\frac{E_{I_o}}{I_o}$ queda.

$$\frac{E_{Io}}{I_o} = \sqrt{\left(\frac{E_M}{M}\right)^2 + \left(\frac{2E_R}{R}\right)^2 + \frac{\left(\frac{E_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{E_h}{h}\right)^2 + \left(\frac{2E_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{2E_l}{l}\right)^2}{\left(1 - \frac{2l^2}{ght^2}\right)^2}}$$

Sustituyendo valores y despejando E_{Io}

E_{Io} = 69,2 g.cm^2 ≈ 69 g.cm^2

En conclusión. el momento de inercia medido, con su error total es:

I_o = (1,21 ± 0,07).10^2 g.cm^2