ANÁLISIS GRÁFICO DE DATOS EXPERIMENTALES

OBJETIVO:

- Representar gráficamente datos experimentales.
- Ajustar curvas a datos experimentales.
- Establecer un criterio para el análisis de graficas de datos experimentales de acuerdo a la curva obtenida.

METODOLOGIA

Resuelve el taller en casa y en la próxima sesión se aclararan las dudas correspondientes con la respectiva evaluación.

INTRODUCCIÓN

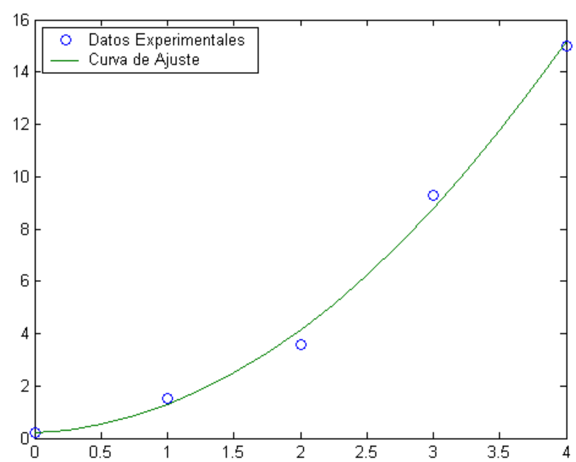
En el estudio de fenómenos físicos, muchas veces se desea medir una cantidad física de un sistema bajo ciertas condiciones. Es decir, encontrar la expresión matemática que relaciona dos o más variables dentro de un sistema. Para resolver esta situación se puede proceder de la siguiente forma:

- Se acondiciona el montaje, de tal forma que se puedan variar dos cantidades escogidas mientras las demás permanecen constantes.
- Mientras se varía la una, se observa como cambia la otra y se registra cada par de datos.
- Se realiza una grafica.
- Se encuentra la ecuación que mejor se ajusta a los datos experimentales.
- Se analizan las constantes que aparecen en la ecuación para determinar las características físicas del sistema estudiado.
- Se escribe la expresión general que relaciona las dos variables físicas estudiadas.
- Se prueba la ecuación midiendo a través de ella algunos valores y se comprueba experimentalmente su concordancia.

Para el análisis de las constantes que aparecen, se debe tener en cuenta que unas tienen relación con lo que permaneció constante en nuestro experimento y otras con las condiciones iniciales. También es necesario realizar un análisis dimensional de las constantes para saber su significado físico.

AJUSTE DE CURVAS A DATOS EXPERIMENTALES

Ajustar una curva, es aproximar una función ***f(x)*** *a* un conjunto de datos experimentales dado (x_i,y_i), $i=1...N$. La función ***f(x)*** elegida para ajustarse a los datos debe tener cierto número de coeficientes que hay que determinar.



MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

Este método para determinar los coeficientes, se basa en la ***minimización*** de las discrepancias entre ***f(x)*** y los puntos de datos **(*xi,yi*).**

$r_i = y_i - f(x_i)$: Desviación de la función elegida respecto a cada uno de los datos.

$R = \sum_{i=1}^{N} r_i^2$: Suma del cuadrado de las desviaciones.

$\frac{\partial R}{\partial c_j} = 0$: Condición de minimización de las discrepancias para encontrar los coeficientes C_j.

Aplicaremos el método de mínimos cuadrados para ajustar datos experimentales a situaciones que más se presentan en el estudio de fenómenos físicos:

CASO 1: DATOS QUE SE AJUSTAN A UNA LINEA RECTA DE LA FORMA *y = mx +b*

Si la función que ajusta el conjunto de datos **(*xi , yi*)** es lineal, es decir, de la forma ***y = mx +b***, entonces, la condición de minimización de las discrepancias permite encontrar los coeficientes ***m*** (pendiente) y ***b*** (corte con el eje y) por las siguientes formulas:

$$m = \frac{DN - AB}{E} \quad \text{y} \quad b = \frac{CB - AD}{E} \qquad (1)$$

Donde N es el número de datos, $A = \sum_{i=1}^{N} x_i$, $B = \sum_{i=1}^{N} y_i$, $C = \sum_{i=1}^{N} x_i^2$, $D = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$, $E = NC - A^2$

Ejemplo 1: Los siguientes datos se registraron del movimiento de un objeto con velocidad constante:

t(s)	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
x (cm.)	2.4	3.6	4.8	5.2	6.5	7.9

Al aplicar las formulas (1) se obtiene:

$$N = 6,\ A = \sum_{i=1}^{6} t_i = 10.5,\ B = \sum_{i=1}^{6} x_i = 30.4,\ C = \sum_{i=1}^{6} t_i^2 = 22.75,\ D = \sum_{i=1}^{6} t_i x_i = 62.35,\ E = 26.25$$

Para calcular finalmente:

$$\boxed{m = 2.09 cm/s} \qquad \boxed{b = 1.4 cm}$$

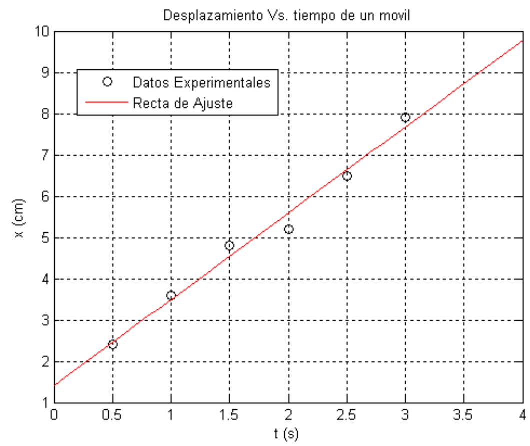


Figura 2.

La ecuación de la recta que mejor se ajusta a los datos experimentales queda (ver figura 2):

$$\boxed{x = 2.09\,t + 1.4} \quad \text{(x en cm y t en s)}$$

Ésta expresión permite encontrar la distancia recorrida (x) del objeto estudiado para cualquier tiempo (t). Para saber por ejemplo la distancia recorrida al cabo de 10s, se remplaza t =10s y se obtiene x = 22.3cm.

Por las unidades (cm./s), la pendiente representa la velocidad constante del objeto (v = 2.09cm/s) y el corte con el eje vertical las condiciones iniciales (t = 0, x = 1.4cm), es decir, cuando se comenzó a contar el tiempo el objeto ya había recorrido 1.4cm. Entonces, la expresión general para calcular la distancia recorrida (x) al cabo de un tiempo (t) de un objeto que se mueve con velocidad constante (v) y parte de la posición inicial (x_o), se puede escribir:

$$\boxed{x = vt + x_o}$$

CASO 2: DATOS QUE SE AJUSTAN A UNA LINEA RECTA DE LA FORMA *y = mx.*

Para este caso, la expresión para calcular la pendiente se reduce a:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Ejemplo 2: Los siguientes datos se registraron de la deformación de un resorte desde su posición de equilibrio al someterse a una fuerza.

x(cm)	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
F(N)	0.0	0.52	1.10	1.60	1.90	2.70

Al aplicar la formula (2) se obtiene:

$$\boxed{m = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i F_i}{\sum_{i=1}^{6} x_i^2} = 0.52N/cm}$$

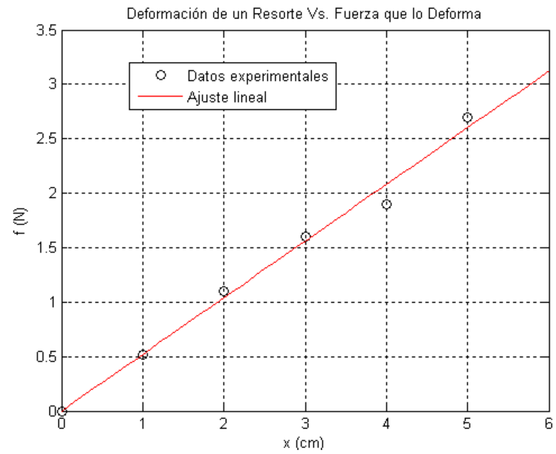


Figura 3.

La ecuación de la recta que mejor se ajusta a los datos experimentales queda (ver figura 3):

$\boxed{F = 0.52\,x}$ (x en cm y F en N)

Ésta expresión permite encontrar la fuerza (F) que se ejerce sobre el resorte estudiado para cualquier deformación (x) que sufre. Para saber por ejemplo la fuerza que deforma el resorte 8cm, se remplaza x =8cm y se obtiene $F = 4.16$N.

Por las unidades (N/cm), la pendiente representa la constante de elasticidad del resorte (K= 0.52N/cm). Entonces, la expresión general para calcular la Fuerza (F) que deforma a un resorte de constante de elasticidad (K) una cantidad (x) desde su posición de equilibrio se puede escribir:

$$\boxed{F = Kx}$$

CASO 3: DATOS QUE SE AJUSTAN A UNA CURVA DE FORMA CONOCIDA.

Las fórmulas (1) y (2) sólo funcionan cuando los datos se ajustan a una línea recta. Cuando al graficar los datos no resulta una línea recta, pero por el fenómeno se sabe cual es su forma, en este caso, es necesario realizar un cambio de variables (alguna operación matemática con los datos), de tal forma que al graficar los nuevos datos estos se ajusten a una línea recta (**linealización**) y así poder aplicar el método de mínimos cuadrados. Algunos de las situaciones que más se presentan son:

CASO 3.1: Datos que se ajustan a una curva de la forma $y = kx^2$ (cuadrática)

Para este caso se observa directamente que se linealiza con el siguiente cambio de variables:

$$X = x^2 \qquad (3)$$

y al graficar y – X se obtiene una recta de la forma:

$$y = kX \qquad (4)$$

Donde el valor de k se calcula con la formula (2).

Ejemplo 3: Los siguientes datos corresponden al movimiento de un objeto en caída libre cerca de la superficie terrestre:

t (s)	0.0	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
h (cm.)	0.0	5.0	12.0	19.0	30.5	43.5	60.5

Al graficar se obtiene:

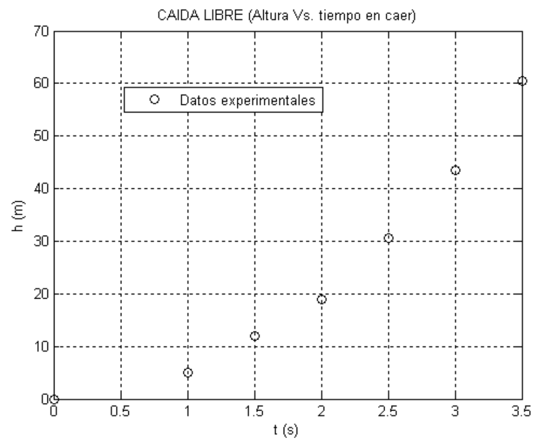


Figura 4.

Observamos que la ecuación de la grafica es de la forma $\boldsymbol{h = kt^2}$. Al realizar el cambio de variable ($T = t^2$) se obtiene la nueva tabla de datos:

$T = t^2$ (s^2)	0.00	1.00	2.25	4.00	6.25	9.00	12.25
h (cm.)	0.0	5.0	12.0	19.0	30.5	43.5	60.5

Los cuales se ajustan a una línea recta de la forma $\boldsymbol{h = kT}$ como lo muestra la figura 5.

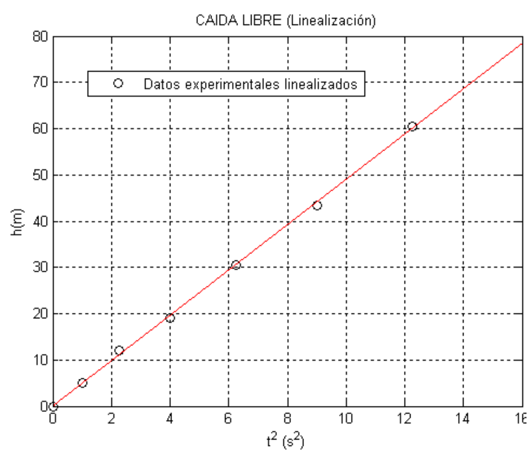


Figura 5.

Aplicando el método de mínimos cuadrados (formula 2) a la nueva tabla se obtiene:

$$\boxed{k = \frac{\sum_{i=1}^{6} T_i h_i}{\sum_{i=1}^{6} T_i^2} = 4.89\text{m}/s^2}$$

La ecuación de la recta que mejor se ajusta a los nuevos datos experimentales queda (ver figura 5):

$$\boxed{h = 4.89T}$$

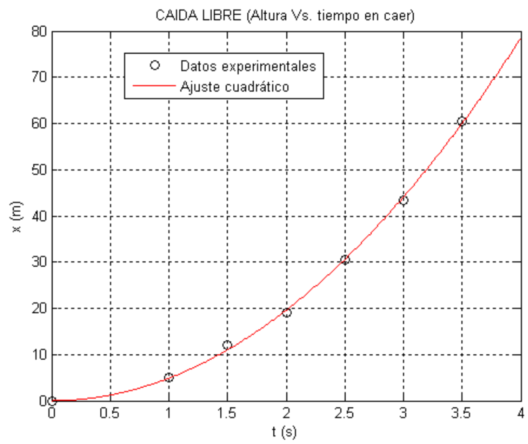


Figura 6.

Luego, la ecuación de la curva que mejor se ajusta a los datos experimentales originales es (ver figura 6):

$$\boxed{h = 4.89t^2} \quad \text{(h en m y t en s)}$$

Ésta expresión permite encontrar la altura de caída (h) del objeto estudiado para cualquier tiempo (t) que tarde en caer. Para saber por ejemplo la altura de la cual cayó si se tardó 10s, se remplaza $t = 10s$ y se obtiene $h = 489.83m$.

CASO 3.2: Datos que se ajustan a una curva de la forma $y = y_o e^{\lambda x}$ (exponencial)

Al aplicar logaritmo natural obtenemos:

$$Lny = \lambda x + \ln y_o \qquad (5)$$

Observamos que al realizar el cambio de variables $Y = Lny$ la grafica de $Y - x$ es una línea recta de la forma:

$$Y = mx + b \qquad (6)$$

Donde los valores de m y b se calculan con ayuda de las expresiones (1).
Para el cálculo de las constantes λ y y_o, se comparan las expresiones (5) y (6) así:

$$\begin{aligned} \lambda &= m \\ y_o &= e^b \end{aligned} \qquad (7)$$

Ejemplo 4: En una muestra con trazadores, la radiactividad total de una muestra vegetal variaba con el tiempo como lo indica la siguiente tabla:

t (h)	0.0	3.0	6.0	9.0	12.0	15.0	18.0	21.0	24.0	27.0	30.0
I (número/min.)	108	94	82	71	62	52	47	41	36	31	25

Al graficar se obtiene:

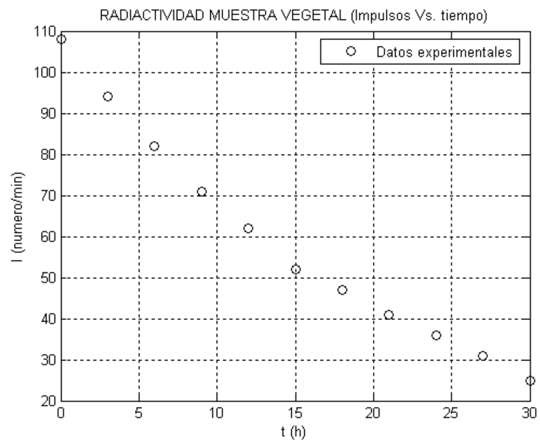


Figura 7.

Observamos que la ecuación de la grafica es de la forma $I = I_o e^{\lambda t}$

Al realizar el cambio de variable ($Y = LnI$) se obtiene la nueva tabla de datos:

t	0.0	3.0	6.0	9.0	12.0	15.0	18.0	21.0	24.0	27.0	30.0
$Y = LnI$	4.68	4.54	4.41	4.26	4.13	3.95	3.85	3.71	3.58	3.43	3.22

Los cuales se ajustan a una línea recta como lo muestra la figura 8.

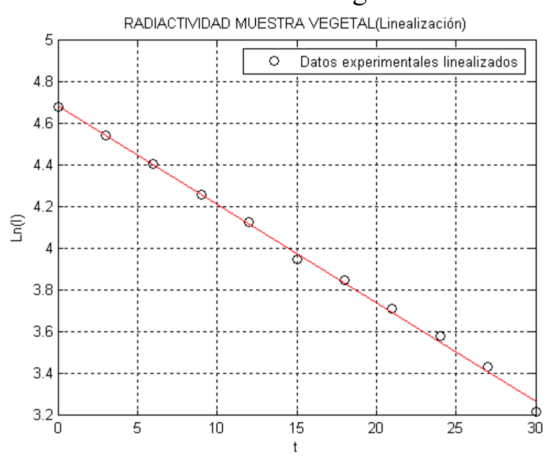


Figura 8.

Aplicando el método de mínimos cuadrados (formula 1) a la nueva tabla se obtiene:

m = -0.05

b = 4.7

La ecuación de la recta que mejor se ajusta a los nuevos datos experimentales queda (ver figura 8):

$$\boxed{LnI = -0.05t + 4.7}$$

Los valores de las constantes son:

$$\lambda = m = -0.05$$

$$I_o = e^b = 108$$

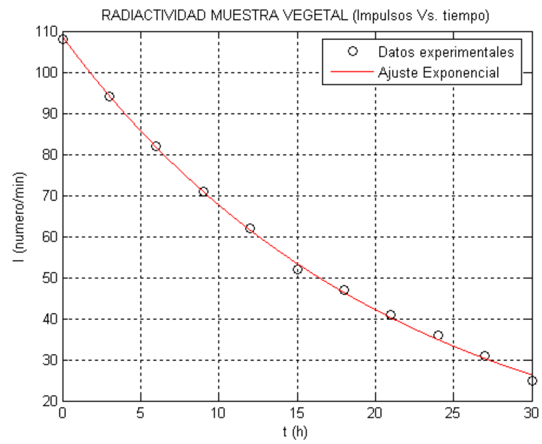


Figura 9.

Luego, la ecuación de la curva que mejor se ajusta a los datos experimentales originales es (ver figura 9):

$$\boxed{I = 108e^{-0.05t}} \quad \text{(I en numero/min. y t en horas)}$$

Ésta expresión permite encontrar en cuanto ha decaído la radiactividad total (I) de la muestra vegetal en estudio para cualquier tiempo (t). Para saber por ejemplo la radiactividad total al cabo de 50h, se remplaza t =50h y se obtiene I = 10 numero/min.

CASO 3.3: Datos que se ajustan a una curva de la forma $y = kx^n$

Al aplicar logaritmo natural obtenemos:

$$Lny = nLnx + \ln k \tag{8}$$

Observamos que al realizar el cambio de variables $Y = Lny$ y $X = Lnx$ la grafica de Y – X es una línea recta de la forma:

$$Y = mX + b \tag{9}$$

Donde los valores de m y b se calculan con ayuda de las expresiones (1).

Para el cálculo de las constantes **n** y **k**, se comparan las expresiones (8) y (9) así:

$$\begin{aligned} n &= m \\ k &= e^b \end{aligned} \tag{10}$$

En general siempre es posible encontrar el cambio de variables adecuado siempre y cuando se conozca la forma de la expresión que relaciona las variables. Por ejemplo, la fuerza entre cargas electrostáticas está descrita por:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

Donde F y r son variables medidas para q_1 y q_2 fijas y conocidas. ¿Cómo encontrar la constante ε_o?

Para ello, se realiza una gráfica de F contra $1/r^2$ para linealizar los datos y la pendiente (m) de la gráfica corresponde a

$$m = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o}$$

De la cual se obtiene ε_o.

TALLER

1. En cierto movimiento de un cuerpo bajo la acción de una fuerza, el desplazamiento x y el tiempo t se dan en la siguiente tabla.

t (seg)	1	2	3	4	5	6
x (m)	4,1	10,0	17,9	28,2	40,0	53,8

3.1. Dibujar la gráfica de x en función de t.

3.2. Se sabe que la ecuación de este movimiento se da por $x = 1/2\ a.t^2 + y_0$. Deducir gráficamente las constantes a y y_0.

3.3. Encuentre cuanto habrá recorrido el objeto al cabo de un minuto.

4. Se aplica una fuerza constante F a un carrito de masa m y se mide su aceleración a del movimiento producido. Se repite el procedimiento para otros valores de masa manteniendo siempre la misma fuerza. Los resultados se consignan en la siguiente tabla.

m (Kg)	1	2	3	4	5	6
a (m/seg^2)	24,30	13,17	8,25	6,30	4,90	4,25

4.1. Dibujar la gráfica a en función de m.

4.2. Se sabe que $F = m.a$. Deducir gráficamente la constante F.

4.3. Encuentre la aceleración cuando la masa del carrito es de 100Kg.

5. El ritmo al cual las moléculas de agua pasan por osmosis a través de una membrana semipermeable desde un recipiente de agua pura a otro con una disolución de azúcar puede medirse utilizando el marcado radiactivo de algunas de las moléculas de agua. El ritmo (r) a que se mueven las moléculas de agua a través de la membrana viene dado en función del tiempo (t) en la siguiente tabla:

r(unidades arbitrarias)	100	59	38	25	17	11	7	4
t (h)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5

5.1. Represéntese los resultados en una gráfica.

5.2. Admitiendo que la curva sigue una relación de la forma $r = r_o e^{-\lambda t}$, determínese por el método de mínimos cuadrados los valores de λ y $\boldsymbol{r_o}$.

5.3. A qué ritmo se moverían las moléculas de agua por la membrana en estudio al cabo de 10h.

6. Las siguientes mediciones se efectuaron durante una investigación de fenómenos para los cuales no hay modelos disponibles. En cada caso:

6.1. Grafique los datos.

6.2. Identifique una función adecuada de acuerdo a la forma de la gráfica y calcule sus constantes por el método de mínimos cuadrados.

v	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
i	0.61	0.75	0.91	1.11	1.36	1.66	2.03	2.48	3.03

x	2	4	6	8	10	12	14	16	18
y	3.2	16.7	44.2	88.2	150.7	233.5	337.9	464.5	618.0